Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es seien V und W zwei endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K. Zeigen Sie, oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Es seien $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung, $w_1, \ldots, w_n \in W$ linear unabhängige Vektoren sowie $v_i \in f^{-1}(w_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ebenfalls linear unabhängig.

b) Es seien $f : V \to W$ eine surjektive lineare Abbildung, $w_1, \ldots, w_n \in W$ linear abhängige Vektoren sowie $v_i \in f^{-1}(w_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Dann sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ebenfalls linear abhängig.

c) Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann ist eine lineare Abbildung $f : V \to W$ genau dann injektiv, wenn die Vektoren $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 2:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

die Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3$ bzgl. der folgenden Basen

$$B_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$B_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

Fortsetzung nächste Seite!