

Thema Nr. 2
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Es bezeichne $U := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$.

- a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U)$ (also die Dimension von U als \mathbb{R} -Vektorraum).
 b) Sei U' in \mathbb{R}^n die Lösungsmenge einer (weiteren) homogenen Gleichung

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$$

(die Koeffizienten a_1, \dots, a_n sind aus \mathbb{R} ; x_1, \dots, x_n sind Unbestimmte). Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(U \cap U')$ in Abhängigkeit der Koeffizienten a_1, \dots, a_n .

Aufgabe 2:

- a) Gibt es jeweils eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit den angegebenen drei Vorgaben? Begründen Sie Ihre Antwort. (e_1, e_2, e_3 bezeichnen die Standardbasisvektoren in \mathbb{R}^3 .)
 (i) $f(e_1) = (2, 3, 1)$, $f(e_2) = (2, 1, 3)$, $f(e_3) = (4, 4, 4)$.
 (ii) $f((1, 2, 3)) = e_1$, $f((-2, 3, 0)) = e_2$, $f((-3, 1, -3)) = (-1, 1, 1)$.
 b) Bestimmen die Vorgaben

$$\begin{aligned} g((1, 2, -3, -4)) &= (1, 2, 3, 4) \\ g((-2, -2, 5, 13)) &= (4, 3, 2, 1) \\ g((2, 4, -6, -14)) &= (2, 2, 2, 2) \\ g((1, 4, -4, -1)) &= (1, 0, 1, 0) \end{aligned}$$

eine eindeutige lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$?

Aufgabe 3:

In \mathbb{R}^4 betrachten wir die Geraden $g = \{(4, -2, 3, 5) + \lambda(1, -1, 2, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ und $h = \{(-1, 2, 2, 3) + \lambda(0, -1, -1, 3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Bestimmen Sie einen Punkt P_g auf g und einen Punkt P_h auf h , deren Verbindungsvektor $\overrightarrow{P_g P_h}$ sowohl auf g als auch auf h senkrecht steht. Berechnen Sie den Abstand zwischen g und h .

Aufgabe 4:

- a) Bestimmen Sie alle affinen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f((1, 0)) = (2, 3)$ und $f((0, 1)) = (-2, -2)$. Gibt es unter all diesen affinen Abbildungen eine Bewegung (d. h. eine Isometrie)?

- b) Zeigen Sie, dass $g : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y + 5 \\ x + 2 \end{pmatrix}$ eine Bewegung (d. h. eine Isometrie) des \mathbb{R}^2 ist. Zeigen

Sie, dass g eine Gleitspiegelung ist und berechnen Sie die zugehörige Spiegelungsgerade und den zugehörigen Translationsvektor.