Lineare Algebra

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ sei

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & c & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\det(A_{a,b,c}) = 0$.

b) Bestimmen Sie alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\operatorname{Rang} A_{a,b,c} = 3$.

Aufgabe 2:
Es sei V der Vektorraum der reellen 3×3 Matrizen. Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie A^{2012}.

b) Zeigen Sie, dass die Matrizen A und $A - A^2$ jeweils nur einen reellen Eigenwert haben und zeigen Sie ferner, dass die dazugehörenden Eigenvektoren übereinstimmen.

c) Es sei U der von den Matrizen A, A^2 und A^3 aufgespannte Unterraum von V. Finden Sie ein $x \in \mathbb{R}^3$, welches Eigenvektor zu jedem $B \in U$ ist.

Aufgabe 3:
Es sei V der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Auf V werde eine Abbildung

$$\Phi : V \to V \quad \text{durch} \quad A \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

a) Zeigen Sie, dass Φ eine lineare Abbildung ist.

Fortsetzung nächste Seite!