## Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

### Aufgabe 1:

Betrachten Sie die reelle, von zwei reellen Parametern $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ abhängige $3 \times 3$-Matrix

$$A(\lambda, \mu) := \begin{pmatrix} \lambda & 2 & -4 \\ 1 & \lambda & \mu \\ \mu & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3, \mathbb{R}) .$$

Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \mid A(\lambda, \mu) \text{ ist nicht invertierbar.}\}$$

ein Kegelschnitt in $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie den Typ dieses Kegelschnitts und folgern Sie, dass es ein $R > 0$ gibt, so dass $A(\lambda, \mu)$ für alle $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ mit $\lambda^2 + \mu^2 \geq R^2$ invertierbar ist.

### Aufgabe 2:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ reelle Matrizen, so dass das Matrizenprodukt $AB \in \mathbb{R}^{m \times n}$ definiert ist. Im Folgenden bezeichnen wir mit $A$, $B$ und $AB$ ebenso die durch diese Matrizen gegebenen linearen Abbildungen

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \ , \ B : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ und } AB : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m .$$

Es gelte:

$$\ker(AB) = \ker(B) .$$

Man zeige:

a) Ist $w_1, \ldots, w_r \in \mathbb{R}^n$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$, so sind die Vektoren $Aw_1, \ldots, Aw_r$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^m$.

b) Es gilt: $\mathrm{rang}(AB) = \mathrm{rang}(B)$.

c) Es gilt: $\dim \ker(A) \leq \dim \ker(B)$.

Fortsetzung nächste Seite!