

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius r , wobei $1 < r < \infty$ sei.

a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}.$$

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

wobei $c_n = a_n^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei.

Aufgabe 2:

Sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = x \cdot \sin(x).$$

a) Berechnen Sie eine Stammfunktion F von f .

b) Geben Sie an, in welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ die Stammfunktion F lokale Extrema hat, und ob es sich dabei jeweils um ein lokales Maximum oder Minimum handelt.

Aufgabe 3:

Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$$

a) Man zeige, dass f streng monoton wächst.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ besitzt f lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}?$$

(c) Man berechne

$$g' \left(\frac{1}{2} \right).$$