

**Thema Nr. 3**  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton wachsende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

sowie  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine monoton fallende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty.$$

Man zeige, dass die Graphen von  $f$  und  $g$  einen Schnittpunkt besitzen.

**Aufgabe 2:**

Gegeben sei die Funktion  $f : ]2, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

- a) Man zeige, dass  $f$  auf  $]2, \infty[$  monoton fällt und nur positive Werte annimmt.
- b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von  $f$ .
- c) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

mittels des Integralvergleichskriteriums auf Konvergenz.

**Aufgabe 3:**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , definiert durch

$$f(x, y) = x^2(x^2 + y^2 - 2).$$

- a) Man bestimme die Nullstellen von  $f$  und skizziere die Bereiche des  $\mathbb{R}^2$ , in denen  $f$  positive bzw. negative Funktionswerte besitzt.
- b) Man bestimme alle lokalen Extremstellen von  $f$ .