**Thema Nr. 3**
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, stetige Funktion mit
\[
\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty
\]
sowie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende, stetige Funktion mit
\[
\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty.
\]
Man zeige, dass die Graphen von $f$ und $g$ einen Schnittpunkt besitzen.

**Aufgabe 2:**
Gegeben sei die Funktion $f : [2, \infty[ \to \mathbb{R}$ mit
\[
f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.
\]

a) Man zeige, dass $f$ auf $]2, \infty[$ monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von $f$.

c) Man untersuche die Reihe
\[
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}
\]
mittels des Integralvergleichskriteriums auf Konvergenz.

**Aufgabe 3:**
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch
\[
f(x, y) = x^2(x^2 + y^2 - 2).
\]

a) Man bestimme die Nullstellen von $f$ und skizziere die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, in denen $f$ positive bzw. negative Funktionswerte besitzt.

b) Man bestimme alle lokalen Extremstellen von $f$.

Fortsetzung nächste Seite!
Aufgabe 4:
Gegeben sei die Kurve $\gamma : [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit
\[ \gamma(t) = (t^3 - 3t + 2, 12 - 3t^2) \]
mit der Bildmenge
\[ K = \{ \gamma(t) : t \in [1, 2] \}. \]
a) Man berechne $\gamma(1), \gamma(2), \gamma'(1), \gamma'(2)$, und skizziere die Bildmenge $K$.
b) Man bestimme die Bogenlänge von $K$.

Aufgabe 5:
Man bestimme die maximale Lösung des Anfangswertproblems
\[ y'' + 4y = \sin(2x) \]
mit
\[ y(0) = y'(0) = 0. \]