

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

- a) Diskutieren Sie die Funktion $(1-x)e^x$ auf Monotonie-Intervalle, Grenzwerte für $x \rightarrow \pm\infty$ und globale Extrema.
- b) Für welche $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, gilt

$$e^x \leq \frac{1}{1-x} ?$$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass (e, e) ein kritischer Punkt der Funktion

$$f(x, y) = x^y - y^x$$

ist, und bestimmen Sie, ob in (e, e) ein lokales Minimum oder Maximum, ein Sattelpunkt, oder ein Punkt, in dem mit der Hessematrix keine Aussage möglich ist, vorliegt.

Aufgabe 3:

- a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, die gegen a konvergiere. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge der

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

gegen a konvergiert.

- b) Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

- a) Berechnen Sie den kritischen Punkt der Funktion

$$f(x, y, z) = xe^y + yz + zx.$$

Handelt es sich dabei um ein lokales Extremum? Begründen Sie Ihre Entscheidung genau.

- b) Finden Sie eine Folge der Form

$$v_n = (x_n, y_n, z_n),$$

so dass $\|v_n\| \rightarrow \infty$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(v_n) = \infty.$$

Finden Sie eine andere Folge $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dieser Form mit $\|w_n\| \rightarrow \infty$, so dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(w_n) = -\infty,$$

und eine weitere Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dieser Form, ebenfalls mit $\|u_n\| \rightarrow \infty$, für die $f(u_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 5:

Berechnen Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = xy - xy^2$$

mit den Anfangswerten

$$y(0) = -1, \quad y(0) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(0) = 2.$$