

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

a) Man zeige

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2n}$$

für $n \geq 2$ und bestimme damit, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

konvergiert.

b) Man bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \right)$$

konvergiert.

Aufgabe 2:

Man bestimme alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die das Anfangswertproblem

$$y' + ay = e^{bx}, \quad y(0) = 0$$

eine auf \mathbb{R} definierte und auf \mathbb{R}^+ beschränkte Lösung besitzt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Seien $a, b \geq 0$.

a) Man zeige, dass für $a + b > 2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^2} = 0.$$

b) Man zeige, dass für $a + b \leq 2$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|^a |y|^b}{x^2 + y^2}$$

nicht existiert.

Aufgabe 4:

Sei die Funktion $y(x) = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ mit $a > 0$. Man berechne

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx.$$

Aufgabe 5:

Man berechne den größten Flächeninhalt des Dreiecks, das von der x -Achse, von der y -Achse und von der Tangente im Punkt $x = a > 0$ des Graphen von $y = (x + 1)^{-2}$ begrenzt wird.