

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K die durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2 \times 2; \mathbb{R}) : a^2 + b^2 + d^2 \leq 1 \right\}$$

gegebene Menge. Man bestimme

$$\sup_{A \in K} \det(A).$$

Aufgabe 2:

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:

Wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{1 + a_k}$$

konvergiert, dann konvergiert auch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$$

Aufgabe 4:

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

- a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.
- b) Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 5:

Geben Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$f''(t) + 6f'(t) + 9f(t) = e^t$$

an.