

Aufgabe 3: (2+4 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass für jedes
- $n = 1, 2, \dots$
- gilt:

$$\int_0^{2\pi} (\cos(\theta))^{2n} d\theta = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}.$$

- (b) Für jedes
- $R > 0$
- sei der geschlossene Weg
- $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$
- (der also zuerst
- γ_1
- , dann
- γ_2
- und zuletzt
- γ_3
- durchläuft) definiert durch

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= x, & x &\in [0, R] \\ \gamma_2(\theta) &= Re^{i\theta}, & \theta &\in [0, \frac{\pi}{4}] \\ \gamma_3(t) &= -te^{i\pi/4}, & t &\in [-R, 0]. \end{aligned}$$

Betrachten Sie das Wegintegral $\int_{\gamma_R} e^{iz^2} dz$, um zu zeigen, dass die uneigentlichen Integrale

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx$$

gleich sind und den gemeinsamen Wert $\sqrt{\frac{\pi}{8}}$ haben.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ und dass $\sin(u) \geq \frac{2u}{\pi}$ für alle $0 \leq u \leq \pi/2$ gilt.

Aufgabe 4: (2+2+2 Punkte)

Sei auf \mathbb{R}^3 das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} yz \\ zx \\ xy \end{pmatrix} =: v \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben und sei $u(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, $t \in J$, dessen maximale Lösung.

- (a) Man zeige: Die Funktionen

$$E_1(x, y, z) := x^2 - y^2 \quad \text{und} \quad E_2(x, y, z) := y^2 - z^2$$

sind *erste Integrale* von v . (Ein erstes Integral ist eine *Erhaltungsgröße*, also eine stetig differenzierbare Funktion E , deren Ableitung längs des Vektorfeldes v verschwindet; d.h. $E'(x, y, z)v(x, y, z) = 0$. Ein erstes Integral ist demnach auf Integralkurven konstant.)

- (b) Man zeige: Für
- t
- nahe 0 gilt
- $\alpha(t) = -\beta(t) = \gamma(t)$
- .

Hinweis: Es gilt $E_i(u(t)) = E_i(u(0))$ für alle t , $i = 1, 2$.

- (c) Man bestimme die Lösung
- $u(t)$
- und das (maximale) Definitionsintervall
- J
- .

Aufgabe 5: (2+2+2 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $(t, x) \mapsto |\cos x| + t^2$. Man zeige:

- (a) Es gibt ein Intervall $] -\delta, \delta[$, auf dem das Anfangswertproblem $x' = f(t, x)$, $x(0) = 0$ eine und nur eine Lösung besitzt.
- (b) Ist $\alpha(t)$, $t \in]a, b[$ mit $a < 0 < b$, eine Lösung des vorstehenden Anfangswertproblems, so ist $\tilde{\alpha}(s) := -\alpha(-s)$, $s \in]-b, -a[$, ebenfalls eine Lösung.
- (c) Sei $\alpha(t)$, $-\infty \leq t^- < t < t^+ \leq +\infty$, die maximale Lösung des Anfangswertproblems.
 - (i) Es gilt $t^- = -t^+$. **Hinweis:** Man verwende (b).
 - (ii) Es gilt $t^- = -\infty$, $t^+ = \infty$.