Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen verweisen Sie auf einen passenden Satz der Funktionentheorie, bei falschen geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in G mit $f(z_n) = 0$ für alle n, so ist $f(z) \equiv 0$.

b) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in G mit Häufungspunkt und $f(z_n) = 0$ für alle n, so ist $f(z) \equiv 0$.

c) Ist $(z_n)_n$ eine Folge in G mit Häufungspunkt in G und $f(z_n) = 0$ für alle n, so ist $f(z) \equiv 0$.

d) Ist f auf G beschränkt, so ist f konstant.

e) Ist $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

f) Ist $G = \mathbb{C}$ und f auf G beschränkt, so ist f konstant.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2, \mathbb{R}).$$

Geben Sie ein Fundamentalsystem reeller Lösungen des linearen Differentialgleichungssystems

$$\dot{y} = Ay$$

an und untersuchen Sie, ob es stabile Lösungen besitzt. Berechnen Sie auch die Lösung, die der Anfangsbedingung $y(0) = (2, 0)^T$ genügt, und begründen Sie, warum diese Lösung eindeutig ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!