

Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Sei $B(z_0, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r > 0$ in der komplexen Ebene.

- a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle isolierten Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z-4)}{\sin(\pi z)}$$

sowie die Ordnung der Nullstellen und Polstellen von f , so welche vorliegen.

- (b) Sei f die Funktion aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(3/2, 1)} f(z) dz.$$

- (c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(0, 4)} \frac{\cos z}{(z+1)^3} dz.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

- (a) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f(z)| \geq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(z) = f(\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.
- (b) Sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(6 Punkte)