Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:

Sei $B(z_0, r)$ die offene Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und Radius $r > 0$ in der komplexen Ebene.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und alle isolierten Singularitäten der Funktion

$$f(z) = \frac{z^2(z-4)}{\sin(\pi z)}$$

sowie die Ordnung der Nullstellen und Polstellen von f, so welche vorliegen.

(b) Sei f die Funktion aus Aufgabenteil (a). Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(3/2,1)} f(z)dz\,.$$

(c) Bestimmen Sie das Integral

$$\int_{\partial B(0,4)} \frac{\cos z}{(z+1)^3}\,dz\,.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $|f(z)| \geq \pi$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt. Zeigen Sie, dass $f(z) = f(\pi)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine ganze Funktion mit der Eigenschaft, dass $f(z+1) = f(z) = f(z+i)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!