Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge durch einen ausführlichen zusammenhängenden Text zu begründen!

Aufgabe 1:
Sei f eine in einer Umgebung von $\overline{D}_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 2\}$ definierte holomorphe Funktion mit

$$|f(z)| \le 1 \qquad \forall\, z \in \overline{D}_2.$$

Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \le 1$ gilt $|f''(z)| \le 4$.

Hinweis: Cauchy-Integralformel (6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei

$$A = \{0\} \cup \left\{\tfrac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zeigen Sie: Jede auf ganz $\mathbb{C} \setminus A$ definierte, beschränkte, holomorphe Funktion ist konstant.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei

$$f(x,t) := \frac{t^2}{(e^x - x)^2}.$$

a) Zeigen Sie, dass $e^x \neq x$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, also dass f auf ganz $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = f(x,t), \qquad x(0) = 0,$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Lösung hat.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie alle Lösungen von

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 8x + 10y \\ \dot{y} &= -5x - 6y \end{aligned}$$

und skizzieren Sie das Phasenportrait. (6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!