Thema Nr. 1

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Bemerkung: *Begründen Sie Ihre Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text. Für $r > 0$ bezeichne*

$$B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < r\}$$

die offene Kreisscheibe vom Radius r.

Aufgabe 1: Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen f im Punkt a die Art der Singularität von f in a. Geben Sie bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von f in a, bei Polen den Hauptteil und bei wesentlichen Singularitäten das Residuum an.

i)

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \frac{z^3 - 5z + 6i}{z^2 + 1}\,,\ a = i,$$

ii)

$$f : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \frac{1}{\exp(z) - 1}\,,\ a = 2\pi i,$$

iii)

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}\,, f(z) = \cos\left(\frac{1}{z}\right),\ a = 0,$$

Aufgabe 2: Seien

$$p(z) = a_m z^m + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$$

und

$$q(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0 \in \mathbb{C}[z],\ q \neq 0,$$

Polynome vom Grad m und n (i.e. $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$). Zeigen Sie:

i) Ist $m \leq n - 2$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$$

wobei $\partial B_r(0)$ wie üblich den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ bezeichne.

Fortsetzung nächste Seite!