# Thema Nr. 1

*Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.*

**Bemerkung:** *Begründen Sie Ihre Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text. Für $r > 0$ bezeichne*

$$B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < r\}$$

*die offene Kreisscheibe vom Radius $r$.*

**Aufgabe 1:** Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f$ im Punkt $a$ die Art der Singularität von $f$ in $a$. Geben Sie bei hebbaren Singularitäten den Grenzwert von $f$ in $a$, bei Polen den Hauptteil und bei wesentlichen Singularitäten das Residuum an.

i)
$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm i\} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \frac{z^3 - 5z + 6i}{z^2 + 1}\,, \ a = i,$$

ii)
$$f : \mathbb{C} \setminus 2\pi i\mathbb{Z} \to \mathbb{C}\,, f(z) = \frac{1}{\exp(z) - 1}\,, \ a = 2\pi i,$$

iii)
$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}\,, f(z) = \cos\Big(\frac{1}{z}\Big)\,, \ a = 0,$$

**Aufgabe 2:** Seien

$$p(z) = a_m z^m + \ldots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$$

und

$$q(z) = b_n z^n + \ldots + b_1 z + b_0 \in \mathbb{C}[z],\ q \neq 0,$$

Polynome vom Grad $m$ und $n$ (i.e. $a_m \neq 0$, $b_n \neq 0$). Zeigen Sie:

i) Ist $m \leq n - 2$, so gilt

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_r(0)} \frac{p(z)}{q(z)} dz = 0$$

wobei $\partial B_r(0)$ wie üblich den Weg $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = re^{it}$ bezeichne.

**Fortsetzung nächste Seite!**