

Thema Nr. 3

(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten.

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1

Sei A eine reelle $n \times n$ -Matrix derart, dass alle Eigenwerte von A nichtpositive Realteile besitzen (d.h., $\operatorname{Re}(\lambda_j) \leq 0$ für alle Eigenwerte λ_j von A).

a) Zeigen Sie: Falls alle Eigenwerte von A einfach sind und $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ ist, dann bleibt $x(t)$ beschränkt, wenn $t \rightarrow +\infty$.

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Behauptung in (a) nicht mehr richtig ist, wenn nicht alle Eigenwerte einfach sind!

c) Zeigen Sie: Ist A eine symmetrische Matrix, so bleibt $x(t)$ beschränkt, wenn $t \rightarrow +\infty$

Aufgabe 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy(x) \frac{dy}{dx}(x) = x^2 + y(x)^2, \quad y(1) = 2.$$

(Hinweis: Es könnte nützlich sein, eine äquivalente Differentialgleichung für $w = \frac{y}{x}$ zu betrachten.)

Aufgabe 3

Es sei f eine meromorphe Funktion auf \mathbb{C} . Weiter sei entweder $z = \infty$ ein Pol von f , oder es habe f eine holomorphe Fortsetzung durch $z = \infty$.

Zeigen Sie, dass dann f eine rationale Funktion ist!

