## Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

*Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.*

### Aufgabe 1

Sei $A$ eine reelle $n \times n-$Matrix derart, dass alle Eigenwerte von $A$ nichtpositive Realteile besitzen ($d.h., Re(\lambda_j) \leq 0$ für alle Eigenwerte $\lambda_j$ von $A$).

a) Zeigen Sie: Falls alle Eigenwerte von $A$ einfach sind und $x(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $x'(t) = Ax(t)$ ist, dann bleibt $x(t)$ beschränkt, wenn $t \rightarrow +\infty$.

b) Zeigen Sie an einem Beispiel, dass die Behauptung in (a) nicht mehr richtig ist, wenn nicht alle Eigenwerte einfach sind!

c) Zeigen Sie: Ist $A$ eine symmetrische Matrix, so bleibt $x(t)$ beschränkt, wenn $t \rightarrow +\infty$

### Aufgabe 2

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$xy(x)\frac{dy}{dx}(x) = x^2 + y(x)^2, \qquad y(1) = 2.$$

(Hinweis: Es könnte nützlich sein, eine äquivalente Differentialgleichung für $w = \frac{y}{x}$ zu betrachten.)

### Aufgabe 3

Es sei $f$ eine meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$. Weiter sei entweder $z = \infty$ ein Pol von $f$, oder es habe $f$ eine holomorphe Fortsetzung durch $z = \infty$.
Zeigen Sie, dass dann $f$ eine rationale Funktion ist!

Fortsetzung nächste Seite!