

### Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen! Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte.

**Aufgabe 1.** Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x} = x - x^2 + \gamma \dot{x}$$

mit einem reellen Parameter  $\gamma$ .

- (a) Sei zunächst  $\gamma = 0$ . Bestimmen Sie eine Erhaltungsgröße (ein erstes Integral) der Differentialgleichung, und skizzieren Sie das Phasenportrait! Welche stationären Lösungen der Differentialgleichung sind stabil?

(Hinweis: Um eine Erhaltungsgröße zu finden, kann man z. B. die mit  $\dot{x}$  multiplizierte Gleichung betrachten.)

- (b) Sei nun  $\gamma \neq 0$ . Wie verhält sich jetzt die Erhaltungsgröße aus Teil (a) längs Lösungen der Differentialgleichung? Für welche Werte von  $\gamma$  besitzt die Differentialgleichung asymptotisch stabile stationäre Lösungen und welche sind dies?

**Aufgabe 2.** Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung  $\dot{x} = Ax$  mit  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ .

**Aufgabe 3.** Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(*) \quad \dot{x} = f(x), \quad x(0) = 0$$

mit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

- (i)  $f$  stetig differenzierbar  $\Rightarrow$  (\*) hat eine eindeutig bestimmte Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- (ii)  $f$  stetig differenzierbar und  $x : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  die maximal fortgesetzte Lösung von (\*)  $\Rightarrow \limsup_{t \rightarrow 1} |x(t)| = \infty$ .
- (iii) (\*) hat eine eindeutig bestimmte Lösung auf einem Intervall  $] -\delta, \delta[$  mit  $\delta > 0 \Rightarrow f$  ist in einer Umgebung von 0 Lipschitz-stetig.
- (iv)  $f$  beschränkt und lokal Lipschitz-stetig  $\Rightarrow$  (\*) hat eine eindeutig bestimmte Lösung  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Die Antwort ist durch Hinweis auf entsprechende allgemeine Aussagen oder Gegenbeispiel kurz zu begründen!

Fortsetzung nächste Seite!

