

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 1 - 5 sind alle Schlussfolgerungen und nicht-trivialen Rechenschritte mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie diejenige holomorphe Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, die die harmonische Funktion $u(x, y) = x^3y - xy^3$ als Realteil hat und die Bedingung $f(0) = 3i$ erfüllt. Drücken Sie f als Funktion der komplexen Variablen $z = x + iy$ aus.

Aufgabe 2:

a) Zeigen Sie, dass alle Nullstellen des Polynoms $P(z) = 3z^3 + z + i$ in der offenen komplexen Einheitskreisscheibe liegen.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_{i-\infty}^{i+\infty} \frac{e^{iz}}{3z^3 + z + i} dz$.

c) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$. Gibt es eine holomorphe Abbildung $h : D \rightarrow \mathbb{C}$ derart, dass $P(z) = e^{h(z)}$ (mit P wie in (a)) gilt?

Aufgabe 3:

Sei $G = \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, y \leq 0\}$, und sei $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion mit $f(1) = 1$ und $f(z)^2 = z$ für alle $z \in G$.

a) Zeigen Sie, dass f stetig auf \mathbb{R} ist, wenn man noch $f(0) := 0$ setzt.

b) Berechnen Sie das Integral $\int_C f(z) dz$, wobei C den positiv orientierten, geschlossenen Weg bezeichne, der den Halbkreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ berandet.

Aufgabe 4:

Erstellen Sie für das System

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = |x|$$

das Phasenportrait und bestimmen Sie explizite Darstellungen aller Lösungen, die für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ gegen $(0, 0)$ konvergieren. Erklären Sie ferner, warum jedes zu diesem System gehörige Anfangswertproblem eindeutig lösbar ist.

