**Thema Nr. 3**  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte

**Aufgabe 1:**

Seien \( A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \), \( b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \), \( b(t) := \begin{pmatrix} -t \\ e^{-t} \\ 1 + t \end{pmatrix} \).

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung \( \dot{x} = Ax \).

b) Berechnen Sie die maximale Lösung des Anfangswertproblems

\[
\dot{x} = Ax + b(t), \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.
\]

**Aufgabe 2:**

Sei \( D := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t^2 + x^2 < 1\} \) und \( f : D \to \mathbb{R}, f(t, x) := \sqrt{1 - t^2 - x^2} \).

Zeigen Sie:

a) Das Anfangswertproblem \( \dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = 0 \)

hat eine eindeutig bestimmte, maximale Lösung \( x : [a, b] \to \mathbb{R} \) mit \(-\infty < a < 0 < b < \infty\).

b) Die Grenzwerte \( x(a) := \lim_{t \to a} x(t), \quad x(b) := \lim_{t \to b} x(t) \) existieren in \( \mathbb{R} \).

c) Es gilt: \( -a = b, \quad b^2 + x(b)^2 = 1, \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} < b < 1 \).

Fortsetzung nächste Seite!
Aufgabe 3:

a) Sei
\[ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) := x^3 + 3xy^2 - 3xy. \]

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von \( g \) und entscheiden Sie jeweils, ob es sich um ein (strenges) lokales Maximum oder Minimum oder um einen Sattelpunkt handelt.

b) Welche stationären Lösungen des Differentialgleichungssystems
\[ \begin{align*}
\dot{x} &= -6xy + 3x \\
\dot{y} &= 3x^2 + 3y^2 - 3y
\end{align*} \]

sind stabil, welche instabil?

Aufgabe 4:

a) Sei \( U := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2 \} \) und \( f : U \to \mathbb{C} \) holomorph mit \( f(0) = 0 \) und \( f(1) = 1 \). Zeigen Sie, dass es ein \( z \in U \) gibt mit \( f(z) \in \mathbb{R} \) und \( f(z) > 1 \).

b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn man
   i) auf die Voraussetzung \( f(0) = 0 \) verzichtet, oder
   ii) \( U \) durch eine beliebige offene Teilmenge von \( \mathbb{C} \) mit \( 0 \in U \) und \( 1 \in U \) ersetzt?

Aufgabe 5:

Sei \( U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \) und \( f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{R}^2 \) stetig differenzierbar mit
\[ \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -\frac{\partial f_2}{\partial x} \text{ auf } U \]

und
\[ \lim_{n \to \infty} f \left( \frac{1}{n}, 0 \right) = (1, 0), \quad \lim_{n \to \infty} f \left( -\frac{1}{n}, 0 \right) = (-1, 0). \]

Zeigen Sie, dass es eine Folge \((x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq U \) gibt mit
\[ \lim_{n \to \infty} (x_n, y_n) = (0, 0), \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = (0, 1). \]

(Hinweis: Nutzen Sie Hilfsmittel der Funktionentheorie.)