

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte

Aufgabe 1:

Untersuchen Sie für die Differentialgleichung

$$y' = 2\sqrt{|y-1|}$$

jeweils, ob es Lösungen mit den wie folgt vorgegebenen Werten gibt, und geben Sie im Falle der Existenz alle solchen Lösungen an:

- a) $y(0) = 0$ und $y(1) = 2$
- b) $y(0) = 0$ und $y(2) = 2$
- c) $y(0) = 0$ und $y(3) = 2$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ der Differentialgleichung

$$y'' + 3y' = e^{4x}.$$

Aufgabe 3:

Für $a \in \mathbb{R}$ sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x^3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Untersuchen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$, ob der Fixpunkt $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ asymptotisch stabil oder stabil ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^2 + 2z + 2}$$

mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

- Zeigen Sie, dass das Integral der Funktion f über den positiv orientierten Kreis um 0 mit Radius 3 verschwindet.
- Zeigen Sie mit oder ohne Hilfe von (a), dass f auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ eine komplexe Stammfunktion hat. (Diese braucht nicht unbedingt ausgerechnet zu werden.)

Aufgabe 5:

Gegeben sei die Funktion

$$g : D \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z}{\sin(z^2 - 4z)}$$

mit maximaler Definitionsmenge $D \subseteq \mathbb{C}$.

- Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten der Funktion g sowie jeweils deren Typ (hebbar? Polstelle wievielter Ordnung? wesentlich?).
- Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) den Konvergenzradius der Potenzreihe für g um den Punkt 0. (Diese Formulierung gibt auch einen kleinen Hinweis für (a).)