Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (6 Punkte)
Sei

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\} \quad \text{und} \quad R := \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}.$$

Weiter sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, die in R keine Nullstellen und in $G \setminus R$ insgesamt k Nullstellen (mit Vielfachheit gerechnet) hat.
Man beweise: Genau dann gibt es eine holomorphe Funktion

$$g : R \to \mathbb{C} \quad \text{mit } g^2(z) = f(z) \text{ für alle } z \in R,$$

wenn k gerade ist.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit

$$f(z + 2\pi) = f(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H}.$$

Man zeige:

a) Es gibt eine holomorphe Funktion

$$g : \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $g(e^{iz}) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$.

b) Es gibt Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inz} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{H},$$

wobei die Reihe auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{H}$ absolut und gleichmäßig konvergiert.

c) Ist $|f|$ beschränkt auf $\mathbb{H}$, so gilt $a_n = 0$ für alle $n < 0$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Sei $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ die obere Halbebene und

$$\begin{aligned} G_1 &:= \mathbb{H} \setminus \{it : 0 < t \le 1\}, \\ G_2 &:= \mathbb{H} \setminus \{e^{it} : 0 < t \le \frac{\pi}{2}\}. \end{aligned}$$

a) Man konstruiere eine biholomorphe Abbildung $f : G_1 \to \mathbb{H}$.
Hinweis: Betrachte zuerst das Bild von G_1 unter der Abbildung $z \mapsto z^2$.

Fortsetzung nächste Seite!