Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Alle Rechnungen und Schlussfolgerungen sind mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Man bestimme die möglichen Werte des Integrals

$$\int_\Gamma \frac{1}{1+z^2}\,dz$$

in den beiden folgenden Situationen:

(i) Γ ist eine Kreislinie in $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$, die einmal im Uhrzeigersinn durchlaufen wird;

(ii) Γ ist eine beliebige stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in $\mathbb{C}\setminus\{\pm i\}$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Man zeige, dass es eine meromorphe Funktion f mit folgenden Eigenschaften gibt:

(i) f verschwindet in allen Punkten $i\nu^2$, $\nu \in \mathbb{N}$;

(ii) f hat in allen Punkten $\mu \in \mathbb{N}$ Polstellen erster Ordnung.

b) Kann man überdies sogar erreichen, dass das Residuum der in (a) konstruierten Funktion f in allen Polstellen $\mu \in \mathbb{N}$ gleich 1 ist? (Begründung!)

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei α ein Winkel mit $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ und sei

$$W_\alpha := \{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \mid z = |z|e^{it} \text{ mit } |t| < \alpha\}.$$

D bezeichne die offene Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ werde mit $\operatorname{Aut}(\Omega)$ die Gruppe der biholomorphen Selbstabbildungen von Ω bezeichnet.

a) Man finde biholomorphe Abbildungen $\phi_1 : W_\alpha \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\}$ und $\phi_2 : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\} \longrightarrow D$.

Fortsetzung nächste Seite!