Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Sei D der Durchschnitt der beiden offenen Kreisscheiben $\{z \in \mathbb{C} : |z-i| < 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$. Bestimmen Sie das Bild von D unter der Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z}{z-(1+i)}.$$

Aufgabe 2:

Für $n = 0, 1, 2\ldots$ sei $P_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ das durch

$$P_n(z) := \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} \{(z^2-1)^n\}$$

definierte Polynom vom Grad n.

a) Beweisen Sie die Gleichheit

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(\zeta^2-1)^n}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta,$$

wobei C eine beliebige positiv orientierte, einfach geschlossene Kurve sei, die z in ihrem Inneren enthält.

b) Verwenden Sie a) zur Berechnung von $P_n(1)$ und $P_n(-1)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine meromorphe Funktion f auf $\mathbb{C}$ mit folgenden drei Eigenschaften:

1. Die Polemenge von f ist $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
2. Alle Pole von f haben die Ordnung 1.
3. Das Residuum von f bei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist n.

Fortsetzung nächste Seite!