Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Art der Singularität der folgenden beiden Funktionen $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ im Nullpunkt:

$$f(z) := \frac{1}{z^2}\sin(z^2), \qquad g(z) := z\cos\frac{1}{z}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma g(z)dz$$

über den positiv orientierten Rand γ des Rechtecks mit den Eckpunkten $1-i$, $1+3i$, $-4+3i$ und $-4-i$.

Aufgabe 2:

Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) := \sin\left(\frac{1}{1-iz}\right).$$

a) Zeigen Sie, dass f holomorph ist und Nullstellen in den Punkten $-i + i\frac{1}{k\pi}$ mit $k \in \mathbb{N}$ besitzt, aber nicht identisch Null ist.
b) Warum widerspricht das Ergebnis in a) nicht dem Identitätssatz?
c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihenentwicklung von f um 0.

Aufgabe 3:

Beweisen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ das Polynom

$$p_\alpha(z) = z^6 + i\alpha z + 1$$

in der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ genau drei Nullstellen (mit Vielfachheit gezählt) hat.

Fortsetzung nächste Seite!