Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl und $q = p^l$ für ein $l > 0$ ($l \in \mathbb{N}$). Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_q$ und Determinante 1 die Ordnung $q(q^2 - 1)$ hat.

Wir betrachten nun die Untergruppen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \mid a \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q \right\}$$

und

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \mid a \in \mathbb{F}_q \right\}$$

von G. (3 Punkte)

a) Sei $\Omega = G/B$ die Menge der Linksnebenklassen von G bzgl. B. Bestimmen Sie die Ordnungen von N^- und B und die Anzahl $|\Omega|$ der Elemente aus Ω.

(1 Punkt)

b) Die Gruppe N^- operiert auf Ω durch Multiplikation von links. Zeigen Sie, dass diese Operation einen Fixpunkt besitzt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:

Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ so, dass die Gleichung

$$x^{101} - (x+1)^{101} + x^2 - 47 \equiv 0 \bmod 101$$

erfüllt ist?

(3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!