Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Seien n, $m > 0$ natürliche Zahlen. Mit $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q})$ bezeichnen wir die Menge der $(n \times m)$-Matrizen mit rationalen Einträgen. Seien $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ und $\mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ die allgemeinen linearen Gruppen in den Dimensionen n und m über $\mathbb{Q}$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})$ vermöge

$$(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}) \times \mathrm{GL}_m(\mathbb{Q})) \times \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q}), \quad ((S,T),A) \mapsto S \cdot A \cdot T^{-1}$$

auf $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{Q})$ operiert, aber nicht effektiv. (Dabei heißt eine Gruppenoperation $G \times X \to X$ einer Gruppe G auf einer Menge X *effektiv*, wenn aus $\forall x \in X: g{\cdot}x = x$ für ein Gruppenelement $g \in G$ schon $g = 1$ folgt.)

b) Zeigen Sie, dass diese Operation genau $r + 1$ Bahnen besitzt, dabei ist $r :=\min(m, n)$. (Tipp: Verwenden Sie den Rang einer Matrix.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $n \in \mathbb{N}_0$ eine natürliche Zahl. Zeigen Sie, dass das Polynom $f(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ keine mehrfachen Nullstellen in den komplexen Zahlen besitzt. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

Seien p eine Primzahl und ζ eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$. Sei $R = \mathbb{Z}[\zeta]$ der von ζ erzeugte Unterring von $\mathbb{C}$. Sei $a \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{Z}/\left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\right) \to R/(a-\zeta), \quad n + \left(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\right) \mapsto n + (a - \zeta)$$

ein wohldefinierter Ringisomorphismus ist und folgern Sie daraus, dass $2 - \zeta$ genau dann ein Primelement in R ist, wenn $2^p - 1$ eine Primzahl ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!