

Thema Nr. 1
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:

Sei S_3 die symmetrische Gruppe und G eine Gruppe mit einer normalen Untergruppe N der Ordnung 5, so dass $G/N \cong S_3$ ist. Zeigen Sie:

- a) $|G| = 30$.
- b) G hat eine normale Untergruppe der Ordnung 15.
- c) G besitzt mindestens drei Untergruppen der Ordnung 10, die nicht normal sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$ und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $|H| = 5$. Zeigen Sie:

- a) H ist ein Normalteiler von G .
- b) H liegt im Zentrum von G .

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel über \mathbb{Q} . Der Ring $R = \mathbb{Z}[\omega]$ ist ein euklidischer Ring mit Normabbildung $N : R \rightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$N(a + b\omega) = (a + b\omega)(a + b\omega^2) = a^2 - ab + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

- a) Ein Element $y \in R$ ist eine Einheit in $R \Leftrightarrow N(y) = 1$.
- b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Dann ist $p = a^2 - ab + b^2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn das Ideal $(p) \subset R$ kein Primideal ist.
- c) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen. Das Ideal $(p) \subset R$ ist genau dann ein Primideal, wenn das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist.

(6 Punkte)

Department Mathematik
Universität Erlangen-Nürnberg
Bismarckstraße 1
91054 Erlangen
Germany

Fortsetzung nächste Seite!

