Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Sei $S_n$ die Gruppe der Permutationen von $n \geq 1$ Elementen. Für welche $1 \leq j \in \mathbb{N}$ gibt es Elemente der Ordnung $j$ in $S_n$ und $n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei $G$ die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$. Der Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ sei für $n \in \mathbb{Z}$ durch $\varphi(n) = (n \mod 9, n \mod 35, n \mod 49)$ gegeben.

Geben Sie eine zyklische Gruppe $H$ an und einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \to H$, so dass $\psi$ einen Isomorphismus $G/\text{im}(\varphi) \cong H$ induziert (hier: $\text{im}(\varphi) = \text{Bild von } \varphi$).

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei $L/\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung vom Grad 3. Sei $\alpha \in L$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie:

a) Es ist $\alpha$ Nullstelle eines Polynoms $f_\alpha(X) = X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{Q}[X]$, für das $b \neq a^2/3$ gilt.

b) Ist $\beta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f_\alpha(X)$, so gilt $\beta \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei $f(X) = X^5 - X - \frac{1}{10} \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) $f(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X)$ hat genau drei reelle Nullstellen.

c) Die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ besitzt eine Einbettung in die Gruppe $S_5$ der Permutationen von 5 Elementen und enthält dann eine Transposition.

(6 Punkte)