

Thema Nr. 2  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Vorbemerkung:** Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

**Aufgabe 1:**

Sei  $X = X_1 \cup X_2$  eine endliche Menge, die disjunkte Vereinigung zweier  $n$ -elementiger Mengen  $X_1$  und  $X_2$  ist, ( $n \geq 2$ ). Sei  $S(X) \cong S_{2n}$  die Menge aller Permutationen von  $X$  (d.h. aller bijektiven Abbildungen  $\sigma : X \rightarrow X$ ). Die Untermenge  $G \subset S(X)$  sei wie folgt definiert:

$$G := \{\sigma \in S(X) : \sigma(X_1) = X_1 \text{ oder } \sigma(X_1) = X_2\}.$$

- a) Zeigen Sie, dass  $G$  eine Untergruppe von  $S(X)$  ist.  
b) Sei  $\varphi : G \rightarrow \{\pm 1\}$  definiert durch

$$\varphi(\sigma) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \sigma(X_1) = X_1, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass  $\varphi$  ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus ist und  $\text{Ker}(\varphi)$  isomorph zu  $S_n \times S_n$  ist.

- c) Ist  $G$  ein Normalteiler von  $S(X)$ ?  
d) Für welche  $n$  ist die Gruppe  $G$  auflösbar?

(8 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Sei  $K$  ein Integritätsring, der einen Körper  $k$  enthält. Die Dimension von  $K$  über  $k$  sei endlich.

- a) Beweisen Sie, dass  $K$  selbst ein Körper ist.  
b) Sei  $x \neq 0$  ein Element von  $K$  über  $k$  mit Minimalpolynom

$$f(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_{n-1} X + a_n \in k[X].$$

Drücken Sie  $y := 1/x$  als ein Polynom in  $x$  aus und bestimmen Sie das Minimalpolynom von  $y$ .

(7 Punkte)

