Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt{35}$ ist irrational.

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

c) Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n + 1$ und $143n + 2$ nicht teilerfremd.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es bezeichne α den n-Zyklus $(1, 2, \ldots, n)$ und H die von α erzeugte Untergruppe in S_n, ferner sei

$$G = \{\sigma \in S_n \,;\ \sigma(n) = n\} \quad .$$

Zeigen Sie:

a) Die Multiplikationsabbildung

$$H \times G \to S_n \quad , \quad (\alpha^\ell, \sigma) \mapsto \alpha^\ell \sigma$$

ist bijektiv.

b) Für $n \geq 4$ ist H kein Normalteiler von S_n.

c) Zu jedem $\sigma \in G$ und jedem ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$ existiert ein $\rho \in G$ mit $\sigma\alpha^\ell = \alpha^{\sigma(\ell)}\rho$.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei p eine Primzahl, sei $\zeta = \exp \frac{2\pi i}{p}$ und sei R der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und ζ enthält. Zeigen Sie:

a) $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-2}$ ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von R.

b) Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}\Big/\Big(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\Big) \xrightarrow{\ \simeq\ } R/(a - \zeta) \quad .$$

c) $2 - \zeta$ ist genau dann Primelement in R, wenn $2^p - 1$ Primzahl ist.

Fortsetzung nächste Seite!