

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 24 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und die entscheidenden Rechenschritte durch einen kurzen Text.

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung $n > 1$, sei p der kleinste Primteiler von n und P eine zyklische, normale p -Sylowgruppe von G .

- a) Zeigen Sie: Ist p^m die Ordnung von P , so ist $p^{m-1}(p-1)$ die Ordnung der Automorphismengruppe $\text{Aut}(P)$ von P .
- b) Die Konjugation von G auf P liefert einen Homomorphismus

$$\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(P) \quad , \quad \alpha(g) : x \mapsto gxg^{-1}$$

für $g \in G$ und $x \in P$.

Zeigen Sie: Der Index $[G : \text{Kern } \alpha]$ ist ein Teiler von $p^{m-1}(p-1)$ und nicht durch p teilbar.

- c) Zeigen Sie, dass P im Zentrum von G enthalten ist.

Aufgabe 2:

Sei R der Unterring des Matrizenringes $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$, der aus den Matrizen $\begin{pmatrix} z & a \\ 0 & z \end{pmatrix}$ mit $z \in \mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Q}$ besteht.

- a) Zeigen Sie, dass jedes Primideal von R die Elemente

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ für } a \in \mathbb{Q}$$

enthält, und dass diese Elemente ein Ideal N von R bilden, für das $R/N \simeq \mathbb{Z}$ gilt.

- b) Bestimmen Sie alle Primideale von R .

