

Thema Nr. 3  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Man konstruiere eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 2013.

*Hinweis:* Man verwende ein geeignetes semidirektes Produkt.

(6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Seien  $p$  und  $q$  zwei verschiedene Primzahlen, und seien  $\xi \neq 0, \eta \neq 0$  Nullteiler im Restklassenring  $R := \mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ . Zeigen Sie:

$$\xi\eta = 0 \iff \xi R + \eta R = R.$$

(6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Beweisen Sie, dass jeder endliche Integritätsbereich ein Körper ist.

*Hinweis:* Man betrachte eine durch Multiplikation gegebene Abbildung.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

a) Sei  $\mathbb{F}_3$  der Körper mit drei Elementen. Man bestimme alle normierten, irreduziblen Polynome mit  $\text{Grad} \leq 2$  in  $\mathbb{F}_3[X]$ .

b) Ist  $X^4 + 9X^2 - 2X + 2$  in  $\mathbb{Q}[X]$  irreduzibel?

(6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Für  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$  und  $k_n := \text{kgV}\{1, \dots, n\}$  das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen  $1, \dots, n$ . Zeigen Sie, für alle  $n \in \mathbb{N}$ , die folgenden Formeln über die Grade von Körpererweiterungen:

a)  $[\mathbb{Q}(\zeta_1, \dots, \zeta_n) : \mathbb{Q}] = \Phi(k_n)$ , wobei  $\Phi$  die Eulersche  $\Phi$ -Funktion bezeichnet.

b)  $[\mathbb{Q}(\sqrt[n]{2}, \dots, \sqrt[n]{2}) : \mathbb{Q}] = k_n$ .

(6 Punkte)