

Thema Nr. 1  
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**

Sei  $S = \{n \in \mathbb{Z} \mid \text{es gibt } x, y \in \mathbb{Z} \text{ mit } n = x^2 - 23y^2\}$ . Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- a) Die Primzahl 97 ist kein Element von  $S$ .  
Hinweis: Sie können zum Beispiel das Quadratische Reziprozitätsgesetz verwenden. (5 Punkte)
- b) Sind  $a, b \in S$ , dann ist auch  $ab \in S$ . (5 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Sei  $f = X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ . Sei weiter  $f_0 = X$  und für  $n \geq 1$  sei  $f_n = f_{n-1}(f) = f(f_{n-1})$  das  $n$ -fach iterierte Polynom  $f$ , also

$$f_1 = X^2 - 2, \quad f_2 = (X^2 - 2)^2 - 2, \quad f_3 = ((X^2 - 2)^2 - 2)^2 - 2 \quad \text{usw.}$$

Zeigen Sie:

- a) Alle Polynome  $f_n$  sind irreduzibel. (5 Punkte)
- b) Sei  $z_n = e^{2\pi i / 2^{n+1}}$  eine primitive  $2^{n+2}$ -te Einheitswurzel. Für  $k$  ungerade ist  $2 \cos \frac{k\pi}{2^{n+1}} = z_n^k + z_n^{-k}$  eine Nullstelle von  $f_n$ . (5 Punkte)
- c) Die Galoisgruppe von  $f_2$  über  $\mathbb{Q}$  ist abelsch. (5 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Sei  $G = SL(2, \mathbb{F}_7) = \{A \in GL(2, \mathbb{F}_7) \mid \det(A) = 1\}$  und  $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{F}_7 \right\}$ .

- a) Zeigen Sie, dass  $H$  eine Untergruppe der Ordnung 7 von  $G$  ist. (3 Punkte)
- b) Zeigen Sie, dass  $SL(2, \mathbb{F}_7)$  Ordnung 336 hat. (6 Punkte)
- c) Wie viele Untergruppen der Ordnung 7 gibt es in  $G$ ? (6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Sei  $f \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom vom Grad  $n \geq 1$ . Zeigen Sie, dass es höchstens  $n - 1$  komplexe Zahlen  $\alpha$  gibt, für die  $f(X) - \alpha$  eine mehrfache Nullstelle hat. (10 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Sei  $M$  die Menge der  $3 \times 3$ -Matrizen mit Einträgen aus  $\mathbb{C}$ , deren charakteristisches Polynom  $(X - 1)^3$  ist.

- a) Zeigen Sie:  $GL(3, \mathbb{C})$  operiert durch Konjugation auf  $M: P * A = PAP^{-1}$  für  $P \in GL(3, \mathbb{C})$  und  $A \in M$ . (4 Punkte)
- b) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen dieser Operation. (6 Punkte)