

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen der reellen Funktion

$$f(x) = x^5 + x^4 - 2.$$

Begründen Sie insbesondere, dass es über die von Ihnen angegebenen Nullstellen hinaus keine weiteren rationalen Nullstellen gibt. (5 Punkte)

Aufgabe 2:

R sei ein endlicher kommutativer Ring mit Einselement. Zeigen Sie, dass jedes Element aus R entweder Einheit oder Nullteiler ist. (5 Punkte)

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n derart, dass die symmetrische Gruppe S_n eine Untergruppe mit Index 3 besitzt. (5 Punkte)

G4 Aufgabe 4:

Es sei p eine Primzahl, G eine endliche p -Gruppe und N ein Normalteiler in G der Ordnung p . Zeigen Sie, dass N im Zentrum von G liegt. (5 Punkte)

Aufgabe 5:

Das Polynom

$$f = X^4 - 2aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$$

sei irreduzibel, und L bezeichne seinen Zerfällungskörper in \mathbb{C} . Ferner sei

$$K := \mathbb{Q}(\sqrt{a^2 - b}).$$

Beweisen Sie:

- Ist $[L : \mathbb{Q}] = 4$, so ist $\sqrt{b} \in K$.
- Ist $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$, so ist $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
- Ist $\sqrt{b} \in K \setminus \mathbb{Q}$, so ist $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4$.
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ist ein primitives Element der Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q}$.
- Welche Struktur hat die Galoisgruppe $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$?

(10 Punkte)