

Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

Aufgabe 1:

Gegeben sei eine natürliche Zahl m . Beweisen Sie:

- a) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $m | \varphi(n)$. (φ bezeichnet die Eulersche Phi-Funktion.)
- b) Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, die in ihrer Dezimaldarstellung nur aus Nullen und Einsen bestehen und Vielfache von m sind.

(5 Punkte)

Aufgabe 2:

G und H bezeichne endliche Gruppen, U sei eine Untergruppe von G und $f : G \rightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Beweisen Sie für die Gruppenindizes die Gleichung

$$[G : U] = [f(G) : f(U)] [\text{Kern } f : (\text{Kern } f \cap U)].$$

(5 Punkte)

Aufgabe 3:

G sei eine Gruppe, und $G \times G$ bezeichne das direkte Produkt von G mit G . Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Ist jede Untergruppe von $G \times G$ Normalteiler, so ist G abelsch.
- b) Ist jede Untergruppe von G Normalteiler, so ist G abelsch.

(5 Punkte)

Aufgabe 4:

R sei ein faktorieller Ring mit Quotientenkörper K , und $x \in K$ sei Nullstelle eines normierten Polynoms aus $R[X]$. Zeigen Sie: $x \in R$. (5 Punkte)

Aufgabe 5:

Ist $K|\mathbb{Q}$ Galois-erweiterung vom Grad 4 mit zyklischer Galoisgruppe, so hat das Polynom $X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ keine Nullstelle in K . (5 Punkte)

