## Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

**Vorbemerkung:** *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

### Aufgabe 1:

Sei $G$ eine endliche Gruppe der Ordnung $n$, sei $n = a \cdot b$ eine Zerlegung in teilerfremde Faktoren $a, b > 1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen minimalen Normalteiler $N$ in $G$ mit zu $b$ teilerfremdem Index $[G : N]$.
b) Der Normalteiler in a) ist die von der Teilmenge $\{g^a;\ g \in G\}$ erzeugte Untergruppe von $G$.
c) Es gibt eine endliche Gruppe $H$ und einen Homomorphismus $u : G \to H$ mit den folgenden Eigenschaften:
   i. Die Ordnung von $H$ ist teilerfremd zu $b$.
   ii. Jeder Gruppenhomomorphismus $f : G \to A$ in eine endliche Gruppe $A$ mit zu $b$ teilerfremder Ordnung faktorisiert eindeutig über $u$, d.h. ist von der Gestalt $f = h \circ u$ mit einem wohlbestimmten Homomorphismus $h : H \to A$.

### Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist das Polynom $aX^4 + bX^3 + c$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

### Aufgabe 3:

Sei $k$ ein Körper, der keine Galois-Erweiterung vom Grad 3 hat. Kann $k$ dann eine Galois-Erweiterung vom Grad 225 haben?

### Aufgabe 4:

Sei $K|k$ eine Galois-Erweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe $S_n$ ist. Zeigen Sie:

a) $K$ enthält $n$ zueinander konjugierte Zwischenkörper vom Grad $n$ über $k$, die zusammen $K$ über $k$ erzeugen.
b) $K$ ist der Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad $n$ aus $k[X]$ über $k$.

Fortsetzung nächste Seite!