Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n, sei $n = a \cdot b$ eine Zerlegung in teilerfremde Faktoren $a, b > 1$. Zeigen Sie:

a) Es gibt einen minimalen Normalteiler N in G mit zu b teilerfremdem Index $[G:N]$.
b) Der Normalteiler in a) ist die von der Teilmenge $\{g^a;\ g \in G\}$ erzeugte Untergruppe von G.
c) Es gibt eine endliche Gruppe H und einen Homomorphismus $u: G \to H$ mit den folgenden Eigenschaften:
   i. Die Ordnung von H ist teilerfremd zu b.
   ii. Jeder Gruppenhomomorphismus $f: G \to A$ in eine endliche Gruppe A mit zu b teilerfremder Ordnung faktorisiert eindeutig über u, d.h. ist von der Gestalt $f = h \circ u$ mit einem wohlbestimmten Homomorphismus $h: H \to A$.

Aufgabe 2:

Zeigen Sie: Sind $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist das Polynom $aX^4 + bX^3 + c$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Aufgabe 3:

Sei k ein Körper, der keine Galois-Erweiterung vom Grad 3 hat. Kann k dann eine Galois-Erweiterung vom Grad 225 haben?

Aufgabe 4:

Sei $K|k$ eine Galois-Erweiterung, deren Galoisgruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_n ist. Zeigen Sie:

a) K enthält n zueinander konjugierte Zwischenkörper vom Grad n über k, die zusammen K über k erzeugen.
b) K ist der Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad n aus $k[X]$ über k.

Fortsetzung nächste Seite!