Thema Nr. 3

Der Übergang von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den Bruchzahlen wird dadurch nötig, dass der Zahlenbereich $\mathbb{N}$ nicht abgeschlossen ist. Denn Schülern ist dies anhand eines konkretes Beispiels bewusst gemacht.

Bisher konnten sie Gleichungen der Form $8 \cdot x = 40$ problemlos lösen.

Entweder sie bekamen die Lösung durch Probieren („Mit welcher Zahl muss ich 8 multiplizieren um 40 zu erhalten") oder sie lösen sie durch die Gegenoperation:

$$8 \cdot x = 40 \quad / : 8 \quad \text{Äquivalenzumf.}$$
$$x = 5$$

Damit war die Aufgabe gelöst.

Nun jedoch sehen sich die Schüler mit dem Problem konfrontiert:

$$8 \cdot x = 5$$

Durch Probieren werden die Schüler ~~Schüler~~ nicht auf die Lösung kommen,

da $8 \cdot 0 = 0$
$8 \cdot 1 = 8$ ist

Die 5 liegt damit zwischen 0 und 8

Denn Schülern wird dadurch verdeutlicht, dass es noch Zahlen zwischen 0 und 1 geben muss.
Veranschaulichen kann man diesen Sachverhalt dadurch, dass man die Zahlenhalbgerade betrachtet bzw. den Schülern mit Hilfe ihres Lineals zeigt, das zwischen 0 und 1 noch weitere „Striche" - welche für Zahlen stehen existieren.
Durch diese Vorarbeit werden die Schüler einsehen, dass die Aufgabe mit einem „geht doch gar nicht" nicht gelöst ist ~~werden~~.
Zurück zur eigentlichen Aufgabe:
Um ~~das~~ die Gleichung $8 \cdot x = 5$ zu lösen kann man die Schüler dazu auffordern, den gleichen Weg zu gehen wie beim Beispiel $8 \cdot x = 40$. ~~Durch die~~ Anhand der Gegenoperation werden die Schüler erkennen dass man für die Lösung der Zahl x durch 8 dividieren muss.
So erhält man die elementare Form der Gleichung und kann die Lösung ~~ab~~ direkt ablesen.
Im erstem Bsp. wäre dies $x = 40 \cdot 8$

im zweiten $x = 5 : 8$.

Bei 40 : 8 werden die Schüler die ~~Regeln~~ Division nach den altbekannten Regeln durchführen. Jedoch sind diese bei 5 : 8 nicht anwendbar, da nach dem jetzigen Wissensstand der Schüler „die 8 nicht in die 5 geht". ~~Damit stehen die Schüler vor dem nächsten Problem. Hier liegt es nun an dem Lehrer, den Schülern zu vermitteln, dass in einem solchen Fall eine Null hinzuzufügen ist~~

Somit ist nun der Punkt erreicht, an dem der Lehrer die Bruchschreibweise einzuführen hat. Er hat den Schülern zu erklären, dass $5 : 8$ und $\frac{5}{8}$ das gleiche ist.

Um diesen für die Schüler vielleicht abstrakt wirkenden Schritt ~~zu~~ nachvollziehbarer zu machen, wird nun auf Alltagswissen der Schüler zurückgegriffen. Dies führt zum Größenkonzept der Bruchrechnung. Dabei werden den Schülern Alltagssituationen aufgezeigt, in denen

sie schon bisher mit Brüchen konfrontiert ~~wurden~~ waren.
1/4 l Milch, 1/4 Stunde, 1/2 Pizza.
Mit Hilfe dieser Alltagsgrößen kann den Schülern der Zusammenhang zwischen der Divisionsdarstellung und der Bruchdarstellung deutlich gemacht werden.
Beispiel: Pizza

Hieran wird ersichtlich, dass eine Pizza halbiert wurde. Man hat damit aus einem Teil zwei gemacht: dadurch 1 : 2 bzw. 1/2.
Oder auch anhand eines Messbechers können Brüche gut veranschaulicht werden.
Hier sind häufig Literangaben und Milliliterangaben zu sehen.

Anhand der Rechnung 1000 ml · x = 500 m

wird deutlich, dass 500 : 1000 geteilt werden muss bzw $\frac{500}{1000}$.

In diesem Zusammenhang können die Schüler gleich mit dem Kürzen von Brüchen vertraut gemacht werden.

Im Vorfeld zur Einführung der rationalen Zahlen wurden bereits Teiler, ~~ggt~~ ggT und kgV durchgenommen.

Nun sollen die Schuler beide Zahlen 500, 1000 in ~~[illegible]~~ Teiler zerlegen.

$500 = 5 \cdot 100$

$1000 = 10 \cdot 100$

$$\frac{500}{1000} = \frac{5 \cdot 100}{10 \cdot 100} = \frac{5}{10} = \frac{5 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{2}$$

Das Kürzen wird den Schüler einleuchtend erschienen, u.a. wenn man vorher solche Aufgaben wie 200 : 100, d.h. $\frac{200}{100}$

20 : 10, d.h. $\frac{20}{10}$ rechnen lässt.

Da sie nämlich hier das Ergebnis sofort ausrechnen können, wird es ihnen auch einleuchten, da $\frac{200}{100} = \frac{20}{10} = \frac{2}{1}$.

Eine Schwierigkeit, die allerdings häufig auftritt, ist die Sache mit der von Schülern häufig als „unsichtbar" bezeichneten „1".

Im Bsp. $\frac{5}{10} = \frac{5}{5 \cdot 2} = \frac{}{2}$ passiert

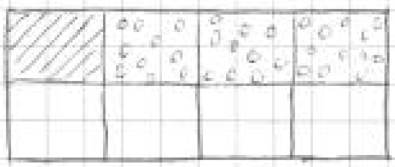
häufig der Fehler, dass die 1 im Zähler vergessen wird und im einem weiteren Schritt aus „$\overline{2}$" ein 2 wird. Deswegen sollte man die Schüler gezielt darauf aufmerksam machen, dass es ja „eine fünf" ist und damit $1 \cdot 5$. Damit kann man dieses Problem aus dem Weg räumen.
Nachdem die Schüler nun mit der Schreibweise eines Bruches vertraut sind $x = \frac{p}{q}$ ($(q \neq 0)$ p, q∈ kann man ihnen den Unterschied zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}_0^+$ erklären. Schließlich ist es wichtig, wofür die Abkürzungen der Zahlenmengen stehen, da die Grundmenge entscheidend für für die Lösungsmeng ist.
Nach welcher Methode man die rationalen positiven Zahlen ~~Z~~ $\mathbb{Z}_0^+$ eingeführt hat, bleibt jedem Lehrer selbst überlassen. Er kann selbst entscheiden, welches Konzept er seinen Ausführungen zugrunde legt.

- Äquivalenzkonzept
- Größenkonzept
- Operatorkonzept
- Gleichungskonzept

weitere Schwierigkeiten die bei den Schülern auftreten, sind die Rechenoperationen in der „neuen" Zahlenmenge.

z.B. $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{16}$ $\begin{matrix}(\text{d.h. } 1+3) \\ (\text{d.h } 8+8)\end{matrix}$

Die Schüler addieren Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner.
Den Schülern muss spätestens in diesem Zusammenhang der Unterschied zwischen Zähler und Nenner bekannt gemacht werden. Am einfachsten funktioniert das mit einem anschaulichen Bsp.



Wir haben einen Kinderriegel mit acht Kammern. Zunächst isst man eine Kammer, kurze Zeit später isst du weitere 3 Kammern. Wieviele Kammern hast du insgesamt gegessen? Damit wird den Schülern klar, dass $\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$ ist und der Nenner lediglich für die Anzahl der Teile steht.

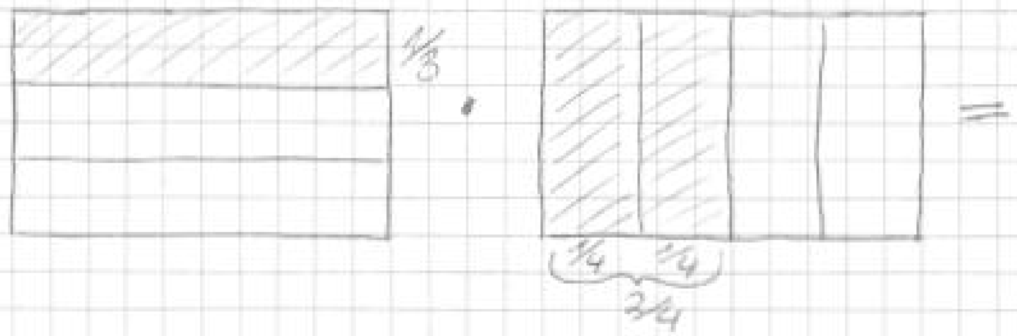
Das wichtigste Problem wird allerdings höchstwahrscheinlich dann auftreten, wenn ungleichnamige Brüche addiert werden sollen. $\frac{1}{4} + \frac{3}{12}$

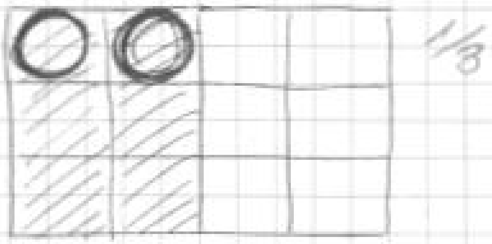
Hier wird den Schülern bewusst gemacht, dass man zur Addition von zwei Brüchen den Hauptnenner bilden muss.
Ähnliche Probleme treten auch bei der Subtraktion auf.
Bzgl. der Multiplikation können die Schüler mit weiteren Problemen konfrontiert werden.

z. B. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4}$

Analog der Addition werden die Schüler womöglich auf die Idee kommen, die Brüche gleichnamig zu machen, d. h. $\frac{4}{12} \cdot \frac{6}{12}$ und anschließend lediglich die Zähler multiplizieren, so dass sich $\frac{24}{12}$ ergeben.

Das die Multiplikation jedoch nach anderen Regeln abläuft, erkennt man nach Veranschaulichung von $1/3 \cdot 2/4$.





$$\Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{4} = \frac{2}{12}$$

Somit wird deutlich, dass man bei der Multiplikation Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.
Ein anderes Problemfeld, dass sich ergeben kann liegt in den verschiedenen Arten der Brüchen.
Man unterscheidet:

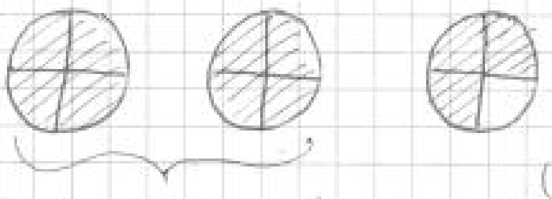
- echte Brüche (z. B. $1/3$)
- unechte Brüche (z. B. $4/3$)
- Scheinbrüche (z. B. $6/3$)

(d. h. $\frac{p}{q}$ mit q ist Teiler von p)

- gemischte Brüche (z. B. $\frac{1}{3}$)
- Dezimalbrüche
  - endlich (z. B. 0,75)
  - unendlich (z. B. periodisch $0,\overline{6}$ $0,1\overline{67}$)

    nicht periodisch π, e

Am problematischten sind dabei u. a. die gemischten Brüche.
Schüler fassen das $2\frac{3}{4}$ falsch auf und machen daraus $2 \cdot \frac{3}{4}$ so dass sich aus $2\frac{3}{4} = \frac{6}{4}$ ergeben.
Dass ~~der~~ die Ziffer zwei für Ganze stehen soll, ist den Schülern häufig nicht War. Daher sollte man den Schülern auch hier wieder ein anschauliches Bsp. geben.



2 ganze Torten + 3 (viertel) Stücke
$= \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

Gemischte Brüche bereiten häufig auch Schwierigkeiten, wenn mit ihnen Rechenoperationen durchgeführt werden sollen. z. B.

$1\frac{3}{4} + 2\frac{7}{3}$

Schüler machen daraus: $1 + 2 + \frac{3}{4} + \frac{7}{3}$

$$= 3 + \frac{9}{12} + \frac{28}{12} = \frac{36}{12} + \frac{9}{12} + \frac{28}{12} = \frac{67}{12} = 5\frac{7}{12}$$

Die richtige Lösung entspricht jedoch

$$\frac{7}{4} + \frac{13}{3} = \frac{21}{12} + \frac{52}{12} = \frac{73}{12} = 6\frac{1}{12}.$$

Man muss somit bei verschiedenen Nennern erstemmal die „Ganzen" wieder zurück in Bruchform bringen, d.h. den gemischten Bruch in einen unechten Bruch.
Es gibt noch eine Vielzahl von weiteren Fehlern, die bei den Schülern im Zusammenhang mit den Bruchzahlen auftreten können. Jedoch muss hierbei v.a. auf die individuellen Schwierigkeiten geachtet werden und mit entsprechenden Übungen & Wiederholungen diese aus dem Weg geräumt werden. Denn Fehler in der Bruchrechnung wären von enormer Tragweite, da Bruchrechnung einen im Schulleben (z.B. Prozentrechnen) und im Alltag immer wieder einholen wird.

Aufgabe 2

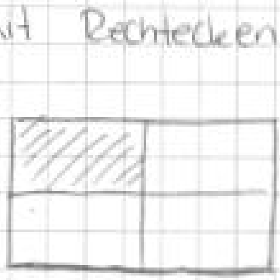
Der Größenvergleich von Brüchen kann auf versch. Arten erfolgen.
Die einfachste Art findet man bei gleichnamigen Brüchen:

$$\frac{1}{6} < \frac{2}{6}$$

Dass dem so ist, ist offensichtlich, da $1<2$ schon vom $\mathbb{N}$ bekannt ist. Die „6" im Nenner interessiert dabei nicht, da ja beide zu vergleichende Brüche aus 6 Teilen bestehen.
Zweite Möglichkeit des Vergleichs sind Brüche, die im Zähler gleich aber dafür im Nenner verschieden sind.

z. B. $\frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

Das dem so ist, wird den Schülern dadurch deutlich gemacht, das man die Brüche wieder auf das Einführungsbeispiel mit Rechtecken zurückführt. Denn ob ich von



oder

etwas, dass in 4 Teile geteilt

dem gleichen, dass in 2 Teile geteilt ist